

Inferência Estatística

Ficha de Exercícios 6

Distribuições amostrais e estatísticas suficientes

Exercício 1. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$. Qual é a distribuição de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$?

Exercício 2. [1, Exercício 5.3] Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição contínua F_X e esperança finita $\mathbb{E}(X_i) = \mu$. Defina

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \geq \mu, \\ 0, & X_i < \mu. \end{cases}$$

Determine a distribuição de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

Exercício 3. Leia a Secção 5.3.1 de [1]. Compreenda as afirmações e demonstre o seguinte resultado. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, com $n \geq 2$ e $\sigma^2 > 0$. Considere

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Então:

- (a) $\bar{X}$ e S^2 são independentes.
- (b) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.
- (c) $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$.

Exercício 4. [1, Exercício 6.6] Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição $\Gamma(\alpha, \beta)$. Determine uma estatística suficiente de dimensão dois para (α, β) . Utilize a parametrização em que α é o parâmetro de forma e β é o parâmetro de escala:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Exercício 5. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson com média $\lambda > 0$. Mostre que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para λ .

Exercício 6. Uma população tem dimensão desconhecida $N \in \{1, 2, \dots\}$, e os seus elementos estão numerados de 1 a N . Seleccionam-se n elementos uniformemente ao acaso, com reposição. Seja X_i o número do elemento seleccionado na i -ésima extração. Determine uma estatística suficiente para N .

Referências

[1] G. Casella and R. L. Berger. *Statistical Inference*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.